Équation de Bessel

Théorème 1. *On considère l'équation différentielle de Bessel $xy'' + y' + xy = 0$. Sa solution f_0 valant 1 en 0 se développe en série entière sur $\mathbb{R}$. De plus, si f est une autre solution sur un intervalle $]0, a[$, alors (f, f_0) est libre si, et seulement si, f n'est pas bornée au voisinage de 0.*

Démonstration.

Étape 1 : Premier point - Analyse
Soit f_0 une série entière. Il existe donc une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et un réel $R > 0$ tels que, sur $]-R, R[$, on ait :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad f_0'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad f_0''(x) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

Si f_0 est solution de l'équation de Bessel sur $]-R, R[$, on a :

$$\begin{aligned} 0 = xf_0''(x) + f_0'(x) + xf_0(x) &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1)n a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n \\ &= a_1 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((n+1)^2 a_{n+1} + a_{n-1}\right) x^n \end{aligned}$$

Par unicité du développement en série entière, on obtient donc les conditions suivantes :

$$\begin{cases} a_1 = 0 \\ \forall\, n \in \mathbb{N},\ (n+2)^2 a_{n+2} = -a_n \end{cases}$$

Ainsi, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{2n+1} = 0$ et :

$$a_{2n} = \frac{-1}{(2n)^2} \frac{-1}{(2(n-1))^2} \cdots \frac{-1}{2^2} a_0 = \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} a_0$$

Comme $a_0 = f(0) = 1$, on obtient :

$$f_0(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n (n!)^2} x^{2n}$$

Étape 2 : Premier point - Synthèse
La série entière ci-dessus a un rayon de convergence infini par le critère de d'Alembert. En effet :

$$\forall\, x \in \mathbb{R}, \qquad \left| \frac{(-1)^{n+1}}{4^{n+1}((n+1)!)^2} \frac{4^n (n!)^2}{(-1)^n} \right| = \frac{1}{4(n+1)^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Alors, les calculs précédents assurent que f_0 est solution de l'équation de Bessel.

Étape 3 : Deuxième point
Soit f une autre solution sur un intervalle $]0, a[$ avec $a > 0$.

Comme f_0 est définie sur $\mathbb{R}$ et continue, elle est bornée au voisinage de 0, ainsi que tous ses multiples. Donc si la famille (f, f_0) est liée, alors f est bornée au voisinage de 0.

Réciproquement, si (f, f_0) est libre, comme on se place sur un intervalle de $\mathbb{R}^{+\star}$, on peut écrire l'équation de Bessel comme $y'' + \frac{1}{x}y' + y = 0$. L'ensemble des solutions de cette équation est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel de dimension 2, donc le wronskien $W = ff_0' - f'f_0$ ne s'annule jamais. Pour tout $x \in]0, a[$, on a :

$$W'(x) = f(x)f_0''(x) - f''(x)f_0(x) = -\frac{1}{x}f(x)f_0'(x) - f(x)f_0(x) + \frac{1}{x}f'(x)f_0(x) + f(x)f_0(x) = -\frac{1}{x}W(x)$$

Ainsi, il existe une constante C non nulle telle que $W(x) = \frac{C}{x}$.
Supposons par l'absurde que f est bornée au voisinage de 0. Comme $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0(x) = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0^+} f_0'(x) = 0$, on a :

$$\frac{C}{x} = f(x)f_0'(x) - f'(x)f_0(x) \underset{x\to 0^+}{\sim} -f'(x)$$

Soit $b \in]0, a[$. Comme $(x \mapsto -\frac{C}{x})$ est de signe constant sur $]0, b]$ et n'est pas intégrable, on obtient :

$$f(x) - f(b) = \int_b^x f'(t)dt \underset{x\to 0^+}{\sim} -C\int_b^x \frac{1}{t}dt = -C(\ln x - \ln b)$$

Ainsi, $f(x)$ est équivalent en 0^+ à $-C\ln x + C\ln b + f(b)$, et f n'est effectivement pas bornée. □

Références

[FGN] Serge Francinou, Hervé Gianella, and Serge Nicolas. *Oraux X-ENS Analyse 4*. Cassini